数理解析研究所講究録 1367 巻 2004 年 15-28

Painlevé 超越関数の値分布について

佐々木 良勝

目 次

1 Introduction

本稿では Painlevé 方程式の値分布について紹介する．既知の結果の主要部分は Shimomoura によって得られたものであって、筆者が付け加えたものはほんの僅かである．近年のより詳細な結果についてまとめて知りたい方は、[1],[3] などを参照されたい．また、邦語で読めるものとして [5] をお薦めする．

Painlevé 方程式 Painlevé 方程式とは次の 6 種の非線形方程式である：

(P_{VI})

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-x}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\\ &+\frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[\alpha+\beta\frac{x}{y^2}+\gamma\frac{x-1}{(y-1)^2}+\delta\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right]\end{aligned}$$

(P_{V})
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} =& \left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\\ &+\frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y+\frac{\beta}{y}\right)+\gamma\frac{y}{x}+\delta\frac{y(y+1)}{y-1}\end{aligned}$$

(P_{IV})
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{2y}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{3}{2}y^3+4xy^2+2(x^2-\alpha)y+\frac{\beta}{y}$$

(P_{III})
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{y}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-\frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{1}{x}(\alpha y^2+\beta)+\gamma y^3+\frac{\delta}{y}$$

$$(P_{\mathrm{II}}) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 2y^3 + xy + \alpha$$

$$(P_{\mathrm{I}}) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 6y^2 + x$$

これらが２階線型常微分方程式のモノドロミー保存変形により得られることが、今日では広く知られている．

既知の結果 Painlevé 超越関数は一般に、$P_{\mathrm{I}}, P_{\mathrm{II}}, P_{\mathrm{IV}}$ は $\mathbb{C}$ 上有理型、$P_{\mathrm{III}}, P_{\mathrm{V}}$ は $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 上有理型、P_{VI} は $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ 上有理型である．Nevanlinna 理論は伝統的に $\mathbb{C}$ 上有理型関数についての理論であって、既知の結果においても $P_{\mathrm{I}}, P_{\mathrm{II}}, P_{\mathrm{IV}}$ の研究が先んじて知られた．

Proposition 1.1. P_{I}(*resp.*$P_{\mathrm{II}}, P_{\mathrm{IV}}$) の任意の解 $y(x)$ は $T(r,y) = O(r^{5/2})$ (*resp.*$O(r^3)$,$O(r^4)$) を満たす．ただし $C > 0$ は $y(x)$ に無関係なある正数．

ここに $T(r,f) = m(r,f) + N(r,f)$ は Nevanlinna 理論にいわゆる特性関数であって、m,N は以下のように定義される：

$$\begin{aligned} m(r,f) &\underset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{\sqrt{-1}\theta})|\mathrm{d}\theta, \quad \log^+ x \underset{\text{def.}}{=} \max\{\log x, 0\}, \\ N(r,f) &\underset{\text{def.}}{=} \int_0^r \{n(t,f) - n(0,f)\}\frac{\mathrm{d}t}{t} + n(0,f)\log r, \end{aligned}$$

$n(r,f)$ は $|x| \le r$ 内での $f(x)$ の極の個数．

一方 $P_{\mathrm{III}}, P_{\mathrm{V}}$ について、modified Painlevé 方程式

$$\begin{aligned} (P_{\mathrm{V}0}) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} &= \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^2 + (w-1)^2\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) \\ &\quad + \gamma \mathrm{e}^z + \frac{\delta \mathrm{e}^{2z} w(w+1)}{w-1}, \end{aligned}$$

$$(P_{\mathrm{III}'0}) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1}{w}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \alpha w^2 + \gamma w^3 + \beta \mathrm{e}^z + \frac{\delta \mathrm{e}^{2z}}{w},$$

を考える．$P_{\mathrm{V}0}$(resp.$P_{\mathrm{III}'0}$) は P_{V}(resp.P_{III}) において $x = \mathrm{e}^z$,$y(\mathrm{e}^z) = w(z)$ (resp.$x = \mathrm{e}^z$,$y(\mathrm{e}^z) = w(z)$ の後、更に $w = \mathrm{e}^{-z}W$,$z = Z/2$ として、($\alpha/4$,$\beta/4$,$\gamma/4$,$\delta/4$,Z,W) を (α,β,γ,δ,z,w) と置き直す) という変換を施して、解の定義域を $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ から $\mathbb{C}$ へと取り直した方程式である．これについて、

Proposition 1.2. ([3]) $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{C}^4$ を一組固定した時、$P_{\mathrm{V}0}$(*resp.*$P_{\mathrm{III}0}{}'$) の任意の解 $w(z)$ は $T(r,w)$=$O(\mathrm{e}^{\Lambda r})$ (*resp.*$O(\mathrm{e}^{\Lambda' r})$), を満たす．ただし $\Lambda = \Lambda_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ (*resp.*$\Lambda' = \Lambda'_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$) は $w'(z)$ によらない正数．

注記 P_{VI} についても、$\mathbb{C}$ 上の有理型関数に変換して同様の結果を得た（ドイツ語の）博士論文があるとのことである．

P_{I},P_{II},P_{IV} のように P_{V},P_{III},P_{VI} をもっと直接的に扱うことはできないのだろうか？これに対して部分的に答えるのが本稿の目的である．

P_{V},P_{III} の動かない特異点 $(=\{0,\infty\})$ のまわりに $\{x||\arg x|<\varphi\}$ のように角領域をとり ($\{x|\phi_1<\arg x<\phi_2\}$ だったら適当にずらせばよい)、この範囲での $r\to\infty$ での振る舞いなどを調べる．

なお、P_{V} にあっては

$$(\gamma,\delta)\neq(0,0) \text{ かつ } (\alpha,\beta)\neq(0,0).$$

P_{III} にあっては

$$(\alpha,\gamma)\neq(0,0) \text{ かつ } (\beta,\delta)\neq(0,0).$$

なる条件を科す．特殊解などへの退化の場合を除いた一般の解に対象を絞る為である．$y(x)$ を上記の条件を満たす P_{V} ないし P_{III} の解とする．

Theorem 1.3. 角領域 $\{x||\arg x|<\varphi(<\pi)\}$ において、P_{V} の解 $y(x)$ が値 1 をとる点の個数は $O(|x|^{C_0})$．ただし、C_0 はパラメータ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ によらないある正数．P_{III} についても同様．

注記　P_{III} についても同様．P_{VI} については計算が間に合わなかった．

注記　大雑把に言うと、P_{V},P_{III} を直接取り扱う為に、大域的評価をあきらめ、動かない特異点の周りの局所的評価をしたものと言える．[3] は大域的評価を得ていることと相違するので注意しておく．

2　証明の概要

場合分けして取り扱うことになるが、紙面の都合もあり、以下では P_{V} で

(1)
$$\delta\neq 0 \text{ かつ } (\alpha,\beta)\neq(0,0)$$

の場合に絞って計算を進める．次のように 10 のステップを踏んで見ていく ([2])．流れが見やすいよう、面倒なところはすべて次節にまわす．

Step.1: 近傍の構成

Lemma 2.1. 条件 (1) を満たすパラメータの組 $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{C}^4$ に対し、$y(x)$ と独立な正数の三つ組 T_0, $\mu\neq 1$ *and* Δ が存在して次を満たす：
$|a|>T_0$ なる $x=a$ に対し、$|y(a)-\mu|\leq\Delta$ ならば (i) $|y(x)-\mu|\geq 2\Delta$ *on* $|x-a|=\epsilon_a$; (ii) $y(x)\neq 1$ *in* $|x-a|\leq\epsilon_a$. ここに、$\epsilon_a>0$ は

(2)
$$\epsilon_a\leq A_0,\quad \epsilon_a^{-1}\leq A_0(1+|a|+|y'(a)|),$$

を満たし、$A_0>0$ は $y(x)$ によらない．

証明は次節に譲る. 3 を見られたい.

Step.2: パスの構成

Lemma 2.2. $S_\varphi^{L_0} \underset{\text{def.}}{=} \{x \| \arg x| < \varphi, L_0 \le |x|\}$ とおく. ただし $L_0 \underset{\text{def.}}{=} \min\{T_0, \frac{A_0}{\sin\varphi}\}$, $0 < \varphi < \pi$. σ を $f(\sigma) = 1, |\sigma| > 2L_0$ を満たす任意の点とする. このとき、以下の性質を満たすパス $\Gamma(\sigma)$ が存在する：
(i) $\Gamma(\sigma) \subset S_\varphi^{L_0}$ は $a_0(\sigma) \in \partial S_\varphi^{L_0} \cap \{x \| x| = L_0\}$ より出でて σ に至る；
(ii) $\Gamma(\sigma)$ の長さは $(\pi+1)|\sigma|$ を超えない；
(iii) $\Gamma(\sigma)$ 上 $|y(x) - \mu| > \Delta$.

証明は次節に譲る. 3 を見られたい.

Step.3: 補助関数

Definition $P_{\rm V}$ の解に対し、補助関数を次のように定める：

$$
\begin{aligned}
\Psi(\mu, x) &= \frac{x^2 y'(x)^2}{y(x)(y(x)-1)^2} - \frac{2(1-\mu)xy'(x)}{(y(x)-1)(y(x)-\mu)} \\
&\quad -2\alpha y(x) + \frac{2\beta}{y(x)} + \frac{2\gamma x}{y(x)-1} + \frac{2\delta x^2 y(x)}{(y(x)-1)^2},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

ただし $\mu \neq 0, 1, \infty$.

$\Psi(\mu, x)$ は次の 1 階線形常微分方程式を満たす：

$$
\frac{\mathrm{d}\Psi(x)}{\mathrm{d}x} - P(x)\Psi(x) = Q(x),
\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
P(x) &\underset{\text{def.}}{=} \frac{(1-\mu)(y(x)-1)(y(x)+\mu)}{x(y(x)-\mu)^2}, \\
Q(x) &\underset{\text{def.}}{=} \frac{2(1-\mu)^2(y(x)+\mu)y'(x)}{(y(x)-\mu)^3} + \frac{\Theta(x, y(x))}{x(y(x)-\mu)^2}, \\
\Theta(x, y(x)) &\underset{\text{def.}}{=} 4(1-\mu)(y(x)-1)(\alpha\mu y(x) - \beta) \\
&\quad -2\gamma x((1-2\mu)y(x)+\mu) + 4\delta\mu x^2 y(x).
\end{aligned}
$$

Lemma 2.3. x_0 より出でて x に至るパス $\Gamma_0(x)$ 上 $y(x) \neq \mu$ ならば、(4) は次のように解かれる：

$$
\begin{aligned}
\Psi(x) &= \Psi(\mu, x_0)E(x) \\
&\quad -2(1-\mu)^2 \left\{ \frac{y(x)}{(y(x)-\mu)^2} + \frac{y(x_0)E(x)}{(y(x_0)-\mu)^2} \right\} \\
&\quad +E(x)\int_\Gamma E(x)^{-1}(\Xi_1 - \Xi_2)\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

where

$$
\begin{aligned}
E(x) &\underset{\text{def.}}{=} \exp\left[(1-\mu)\int_{\Gamma_0(x)} \frac{(y(x)-1)(y(x)+\mu)}{(y(x)-\mu)^2}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right],\\
\Xi_1 &\underset{\text{def.}}{=} 4(1-\mu)\frac{(y(x)-1)(\alpha\mu y(x)-\beta)}{x(y(x)-\mu)^2}\\
&\quad -2\gamma\frac{((1-2\mu)y(x)+\mu)}{(y(x)-\mu)^2}+4\delta\mu x\frac{y(x)}{(y(x)-\mu)^2},\\
\Xi_2 &= 2(1-\mu)^3\frac{y(x)(y(x)-1)(y(x)+\mu)}{x(y(x)-\mu)^4}.
\end{aligned}
$$

Step.4: 補助関数の評価

L_0 上から出るパスの始点で $y(x)=\mu,0,1,\infty$ であっては困るので、その場合は $y(x)\neq\mu,0,1,\infty$ なるよう L_0 をほんの少し大きくとっておく.

Lemma 2.4. *1-点 $x=\sigma$ i.e.$y(\sigma)=1$ と $|\sigma|>2L_0$ に対し、$\Psi(\mu,x)$ は次のように抑えられる : $|\Psi(\mu,x)|\leq K_0|x|^{C_0}$ in $U(\sigma)$=$\{x||x-\sigma|<\eta(\sigma)\}$ with*

$$\eta(\sigma)\underset{\text{def.}}{=}\sup\{\eta||y(x)-1|<\frac{|\mu-1|}{2}\ \textit{for}\ |x-\sigma|<\eta<1\},$$

$C_0>1$ は σ や $y(x)$ によらず、K_0 は σ によらない.

証明は次節に譲る. 3 を見られたい.

Step.5: Lemma の適用

条件 (1) の下、P_{V} の任意の解に対し、ある 1-点 $\sigma\in S_\varphi^{2L_0}$ をとる. $y(x)-1\underset{\text{def.}}{=}Y(x)$ とおく. このとき、ここまでのステップにより、$|\Psi(\mu,x)|\leq K_0|x|^{C_0}$ および $|1-\mu+Y(x)|\neq 0$ in $U(\sigma)$ を得る.

Step.6: 準備 (1).

Lemma 2.5. $x-\sigma=t$ とし、$Y_\sigma(t)\underset{\text{def.}}{=}Y(x)=y(x)-1$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}Y_\sigma(t)}{\mathrm{d}t}=\pm(-2\delta)^{1/2}(1+h_\sigma^{\pm}(t)),$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
h_\sigma^\pm(t) &\underset{\text{def.}}{=} (1+Y_\sigma(t))\Big\{(1+F_\sigma(t))^{1/2} \\
&\qquad \pm\frac{(-2\delta)^{-1/2}}{1+Y_\sigma(t)}\frac{(1-\mu)Y_\sigma(t)(1-Y_\sigma(t))}{1-\mu+Y_\sigma(t)}\Big\}-1, \\
F_\sigma(t) &\underset{\text{def.}}{=} \frac{j_{1\sigma}(t)}{\sigma+t}+\frac{j_{2\sigma}(t)}{(\sigma+t)^2}, \\
j_{1\sigma}(t) &\underset{\text{def.}}{=} \frac{\gamma Y_\sigma(t)}{\delta(1+Y_\sigma(t))}, \\
j_{2\sigma}(t) &\underset{\text{def.}}{=} -\frac{\alpha Y_\sigma(t)^2}{\delta}+\frac{\beta Y_\sigma(t)^2}{\delta(1+Y_\sigma(t))^2} \\
&\qquad -\frac{(1-\mu)^2Y_\sigma(t)^2}{2\delta(1-\mu+Y_\sigma(t))^2}-\frac{Y_\sigma(t)^2\Psi_\sigma(\mu,t)}{2\delta(1+Y_\sigma(t))}, \\
\Psi_\sigma(\mu,t) &\underset{\text{def.}}{=} \Psi(\mu,x).
\end{aligned}
$$

証明は次節に譲る．3 を見られたい．

Step.7: 準備 (2).

前２つのステップを踏まえて、

Lemma 2.6. $|t|<\frac{1}{3}$ と σ によらない十分小さい正数 b に対し、$|Y_\sigma(t)|\le b|x|^{-P}$, $P\underset{\text{def.}}{=}\dfrac{C_0}{2}$ とすると、このとき $|t|<\frac{1}{3}$ に対し $|h_\sigma^\pm(t)|<\frac{1}{2}$.

証明は次節に譲る．3 を見られたい．

Step.8: 局所的評価

Definition. 正数 η_0 を次式で定める：

(5) $$\eta_0 \underset{\text{def.}}{=} \sup\{\eta \,|\, |Y_\sigma(t)|\le b|x|^{-P} \text{ is valid for } |t|<\eta<\frac{1}{3}\}$$

なお、$y(\sigma)=1$ より $Y_\sigma(0)=0$ である．$0<\eta_0\le\frac{1}{3}$ であるからである．

Lemma 2.7. $|t|<\eta_0$ のとき、$|Y_\sigma(t)|\le b|x|^{-P}$ であって、このとき次の評価が得られる：

$$\frac{1}{4}|2\delta|^{1/2}|t|\le|Y_\sigma(t)|\le\frac{7}{4}|2\delta|^{1/2}|t|.$$

Proof.

$$\frac{\mathrm{d}Y_\sigma(t)}{\mathrm{d}t}=\pm(-2\delta)^{1/2}(1+h_\sigma^\pm(t)) \quad ,|h_\sigma^\pm(t)|<\frac{1}{2},$$

であって、これより

$$\frac{\mathrm{d}Y_\sigma(t)}{\mathrm{d}t}\mp(-2\delta)^{1/2}=\pm(-2\delta)^{1/2}h_\sigma^\pm(t),$$

を得る．積分すれば

$$Y_\sigma(t) \mp (-2\delta)^{1/2}|t| = \pm(-2\delta)^{1/2}\int_0^t h_\sigma^\pm(t)\mathrm{d}t.$$

これより次の評価が得られる：

$$|Y_\sigma(t) \mp (-2\delta)^{1/2}t| \le |2\delta|^{1/2}\int_0^t |h_\sigma^\pm(t)||\mathrm{d}t| \le \frac{1}{2}|2\delta|^{1/2}|t|.$$

これより Lemma の結果を得る．//qed.

Step.9: 半径の評価

半径 η_0 を評価する．

Lemma 2.8. $|\sigma| > M \underset{\text{def.}}{=} (\frac{3b}{2|2\delta|^{1/2}})^{1/P} + 2L_0$ のとき、$\eta_0 \ge \kappa(\sigma) \underset{\text{def.}}{=} \frac{b|\sigma|^{-P}}{2|2\delta|^{1/2}}$, $\kappa(\sigma) < \frac{1}{3}$ が成り立つ．

Proof. 背理法で示す．十分大きい $|\sigma|$ に対し、

$$|\sigma| > \left(\frac{3b}{2|2\delta|^{1/2}}\right)^{1/P} + 2L_0$$

ならば $\frac{1}{3} < \frac{b|\sigma|^{-P}}{2|2\delta|^{1/2}}$ かつ $|\sigma| > 2L_0$. $\eta_0 \ge \kappa(\sigma)$ を示したいので、逆に

$$\eta_0 < \frac{b|\sigma|^{-P}}{2|2\delta|^{1/2}}$$

と仮定すると、$|t| < \eta_0 < \frac{1}{3}$ に対し

$$|Y_\sigma(t)| \le \frac{7}{4}|2\delta|^{1/2}|t| \le \frac{7}{4}|2\delta|^{1/2}\eta_0 \le \frac{7}{8}b|\sigma|^{-P}.$$

これは η_0 が (5) の条件を満たす正数の sup として定義されていたことと矛盾．//qed.

Step.10: 角領域内での値分布

以上より、$|\sigma| > M, |t| < \kappa(\sigma)$ に対して、$\frac{1}{4}|2\delta|^{1/2}|t| \le |Y_\sigma(t)| \le \frac{7}{4}|2\delta|^{1/2}|t|$ なる評価が得られる。これより $|y(\sigma)-1| > 0$ for $0 < |x-\sigma| < \kappa(\sigma)$. 故に、$\mu(\cdot)$ で面積を表すことにすると、1-点の数は次のように評価される：

$$\begin{aligned}&\#\{\sigma | y(\sigma) = 1, \sigma \in S_\varphi^r \backslash S_\varphi^{2L_0}\} \\ &\quad \le \frac{\mu(S_\varphi^r \backslash S_\varphi^{2L_0})}{\min\limits_{\sigma \in S_\varphi^r \backslash S_\varphi^{2L_0}} \pi\kappa(\sigma)^2} \le \frac{\mu(S_\varphi^r)}{\pi\kappa(r)^2} = \frac{\varphi r^2}{\frac{\pi b^2}{8\delta^2} r^{-2P}} = O(r^{2P+2}). \quad /\!/\text{qed.}\end{aligned}$$

3 各補題の証明

Proof of Lemma 2.1

まず次の Lemma を示す：

Lemma 3.1.

(6) $$\ddot{u} = g_1(t,u)\dot{u}^2 - g_2(t,u)\dot{u} + 1 + g_0(t,u) \quad (\dot{} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}),$$

$u(t)$ を $t = 0$ 付近での (6) の任意の解とし、$g_j(t,u)(j = 0,1,2)$ は $D_0 = \{(t,u) \in \mathbb{C} | |t| < 1, |u| < R_0\}$, $0 < R_0 < 1$ で解析的とする. ある正数 K があって $|g_0(t,u)| < \frac{1}{200}$, $|g_1(t,u)| < K$, $|g_2(t,u)| < K$ *in* D_0 なるとき、$\theta \underset{\text{def.}}{=} \min\{4^{-1}R_0^{1/2}, (200K)^{-1/2}, (200K)^{-1}\}$. ととる. このとき $|u(0)| \leq \frac{1}{3}\theta^2$. ならば円盤 $|t| < \rho_0$ 内で $|u(t)| \leq 15\theta^2$ かつ円 $|t| = \frac{3}{4}\rho_0$ 上で $|u(t)| \geq \theta^2/3$ となる. ただし、

$$\rho_0 = \begin{cases} 4\theta & if |\dot{u}(0)| \leq 0, \\ \frac{(4/3)\theta^2}{|\dot{u}(0)|} & if |\dot{u}(0)| > 0. \end{cases}$$

Proof. $|\dot{u}(0)| \leq \theta$ のとき：

$$\eta_0 \underset{\text{def.}}{=} \sup\{\eta | |u(t)| \leq 15\theta^2, |\dot{u}(t)| \leq 6\theta \text{ for } |t| < \eta\}.$$

$\eta_0 < 4\theta$ とおく. このとき $\eta_0 < 4\theta \leq R_0^{1/2} < 1$ であって、$|t| < \eta_0$ に対し、$(t, u(t)) \in D_0$ で $|g_0(t,u)| < \frac{1}{200}$, $|g_1(t,u)|, |g_2(t,u)| < K$ を満たす. これより、

$$\begin{aligned}
(7)\ |\dot{v}(t)| &= \left| \int_0^t \mathrm{d}s \{g_1(s,u(s))\dot{u}(s)^2 - g_2(s,u(s))\dot{u}(s) + g_0(s,u(s))\} \right| \\
&\leq \int_0^t |\mathrm{d}s| \left[K\{(6\theta)^2 + 6\theta\} + \frac{1}{200} \right] \\
&\leq \frac{1}{200}(6^2 + 6 + 1)|t| < \frac{4}{200}(6^2 + 6 + 1)\theta, \\
|v(t)| &= \frac{200^{-1}}{2}(6^2 + 6 + 1)|t|^2 \leq \frac{4^2 200^{-1}}{2}(6^2 + 6 + 1)\theta^2.
\end{aligned}$$

よって $|t| < \eta_0$ のとき、

$$\begin{aligned}
|\dot{u}(t)| &\leq |\dot{u}(0)| + |t| + |\dot{v}(t)| \\
&\leq (1 + 4 + (6^2 + 6 + 1)4/200)\theta < 5.87\theta, \\
|u(t)| &\leq |u(0)| + |\dot{u}(0)||t| + \frac{1}{2}|t|^2 + |v(t)| \\
&\leq (\frac{1}{3} + 4 + \frac{1}{2}4^2 + \frac{1}{2}(6^2 + 6 + 1)4^2/200)\theta^2 < 14.1\theta^2,
\end{aligned}$$

だがこれはη_0の定義に矛盾. ゆえに$\eta_0 \geq 4\theta$であって、このとき$|t| < 4\theta (\leq \eta_0)$に対し、(7)-(8) はやはり成立し、さらに、

$$
\begin{aligned}
|u(t)| &\geq \frac{|t|^2}{2} - |u(0)| - |\dot{u}(0)||t| - |v(t)| \\
&\geq (\frac{3^2}{2} - \frac{1}{3} - 3 - \frac{1}{2}(6^2+6+1)3^2/200)\theta^2 \geq \frac{1}{3}\theta^2
\end{aligned}
$$

が円 $|t| = 3\theta$ 上で成立.
$|\dot{u}(0)| \leq \kappa\theta, \kappa > 1$ のとき：

$$
\eta_1 \underset{\text{def.}}{=} \sup\{\eta | |u(t)| \leq 15\theta^2, |\dot{u}(t)| \leq 6\kappa\theta \text{ for } |t| < \eta\}.
$$

$\eta_1 < \frac{4\theta}{\kappa}$ とおく. $\eta_1 < 4\theta \leq R_0^{1/2} < 1$ であって、このとき、$|t| < \eta_1$ に対し、$(t, u(t)) \in D_0$ である. $|g_0(t,u)| < \frac{1}{200}$, $|g_1(t,u)| < K$, $|g_1(t,u)| < K$ を満たす. これより、

$$
\begin{aligned}
(8)\ |\dot{v}(t)| &= \left| \int_0^t \mathrm{d}s \{g_1(s,u(s))\dot{u}(s)^2 - g_2(s,u(s))\dot{u}(s) + g_0(s,u(s))\} \right| \\
&\leq \int_0^t |\mathrm{d}s| \left[K\{(6\kappa\theta)^2 + 6\kappa\theta\} + \frac{1}{200} \right] \\
&\leq \frac{\kappa^2}{200}(6^2+6+1)|t| < \frac{4\kappa}{200}(6^2+6+1)\theta, \\
(9)\ |v(t)| &= \frac{\kappa^2 200^{-1}}{2}(6^2+6+1)|t|^2 = \frac{4^2 200^{-1}}{2}(6^2+6+1)\theta^2.
\end{aligned}
$$

よって、$|t| < \eta_1$ のとき、

$$
\begin{aligned}
|\dot{u}(t)| &\leq |\dot{u}(0)| + |t| + |\dot{v}(t)| \\
&\leq (1 + 4 + (6^2+6+1)4/200)\theta < 5.87\theta, \\
|u(t)| &\leq |u(0)| + |\dot{u}(0)||t| + \frac{1}{2}|t|^2 + |v(t)| \\
&\leq (\frac{1}{3} + 4 + \frac{1}{2}4^2 + \frac{1}{2}(6^2+6+1)4^2/200)\theta^2 < 14.1\theta^2,
\end{aligned}
$$

だがこれはη_1 の定義に矛盾. ゆえに$\eta_1 \geq \frac{4}{\kappa}\theta$ であって、このとき $|t| < \frac{4}{\kappa}\theta (\leq \eta_1)$ に対し、(8)-(9) はやはり成立し、さらに、

$$
\begin{aligned}
|u(t)| &\geq |\dot{u}(0)||t| - |u(0)| - \frac{|t|^2}{2} - |v(t)| \\
&\geq (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(6^2+6+1)1^2/200)\theta^2 \geq \frac{1}{3}\theta^2
\end{aligned}
$$

が円 $|t| = \frac{1}{\kappa}\theta$ 上で成立. //qed.

次に Lemma 2.1 を示す.

Proof. T_0 を十分大きくとり、領域 $S_\varphi^{L_0}$ および $|x| > T_0$ を考える．P_V において $u(x) = y(x) - 2$ とおくと、

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx^2} &= \left(\frac{1}{2(u+2)} + \frac{1}{u+1}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \frac{1}{x}\frac{du}{dx} \\ &\quad + \frac{(u+1)^2}{x^2}\left(\alpha(u+2) + \frac{\beta}{(u+2)}\right) + \frac{\gamma(u+2)}{x} + \frac{\delta(u+2)(u+3)}{(u+1)}\end{aligned}$$

$' = \frac{d}{dx}$ を微分として、上の式は次のように書ける：

$$u'' = G_1(u){u'}^2 - x^{-1}u' + 6\delta(1 + H(x,u)),$$
$$H(x,u) = uh_0(u) + \frac{h_1(u)}{x} + \frac{h_2(u)}{x^2},$$

$$\begin{aligned}h_0(u) &\underset{\text{def.}}{=} \frac{u-1}{6(u+1)}, \\ h_1(u) &\underset{\text{def.}}{=} (6\delta)^{-1}\gamma(u+2), \\ h_2(u) &\underset{\text{def.}}{=} (6\delta)^{-1}(u+1)^2\{\alpha(u+2) + \beta/(u+2)\}.\end{aligned}$$

$|u| < \frac{1}{2}$ に対し $G_1(u)$, $h_j(u)(j = 0,1,2)$ は有界であることに注意する．$x = a + (6\delta)^{-1/2}t$ という風にスケーリングを取り替えて、次の形に変形できる：

$$\ddot{u} = G_1(u)\dot{u}^2 - G_2(t)\dot{u} + 1 + G_0(x,u),$$

ただし、

$$\begin{aligned}G_2(t) &= \frac{(6\delta)^{-1/2}}{a + (6\delta)^{-1/2}t}, \\ G_0(t) &= H(a + (6\delta)^{-1/2}t, u).\end{aligned}$$

T_0 を十分大きく、$\frac{h_1(u)}{x}$, $\frac{h_2(u)}{x^2}$, R_0, $uh_0(u)$ を十分小さくとると、Lemma 3.1 により；具体的には、T_0 に対して、$\mu = 2$, $\Delta = \frac{1}{3}\theta^2$, $K = \max_{|u|=R_0}\{|G_1|, |G_2|\}$,

$$\epsilon_a = \begin{cases} 4|6\delta|^{-1/2}\theta & \text{if } |y'(a)| \le |6\delta|^{1/2}\theta, \\ \theta^2/|y'(a)| & \text{if } |y'(a)| > |6\delta|^{1/2}\theta, \end{cases}$$

と取ると、求める結果が得られる．さらに次も言える：

$$\frac{dy}{dx}(a) = \frac{1}{(6\delta)^{-1/2}}\frac{du}{dt}(0) \therefore |\dot{u}(0)| = (6\delta)^{-1/2}|y'(a)|,$$

ただし、$\theta = \min\{4^{-1}R_0^{1/2}, 200^{-1}K^{-1/2}\} \le \frac{1}{3}$. //qed.

Proof of Lemma 2.2

積分評価に用いるパスを構成する．以下において、T_0, μ, Δ, and A_0 は Lemma 2.1 で与えた定数とする．

Proof. $|\sigma| > 2L_0$ と仮定する．線分 $I = [2s_0, \sigma]$ をとる．$I \cap S_\varphi^{L_0} = [s_0, \sigma]$ に沿って (iii) を満たすならば、$\Gamma(\sigma) = [s_0, \sigma]$ が求めるパスである．

今、(iii) を満たさない、すなわち、$|y(a_1) - \mu| = \Delta$; かつ $x \in [s_0, a_1] \backslash \{a_1\}$ に対し $|y(x) - \mu| > \Delta$ を満たす点 $a_1 \in [s_0, \sigma]$ が存在したとすると、Lemma 2.1 により、半円 c_1: $|x - a_1| = \epsilon_{a_1}$, $c_1 \subset S_\varphi^{L_0}$ が取れる．Lemma 2.1 の (ii) により、σ は円 $|x - a_1| = \epsilon_{a_1}$ の外側にある．c_1 の直径を $[a_1^-, a_1^+]$ と書く．ただし $a_1^- - \sigma > a_1^+ - \sigma$. $\epsilon_{a_1} \leq A_0 \leq L_0$ であるから、もし $a_1^- \neq [s_0, \sigma]$ ならば、c_1 は弧 $\partial S_\varphi^{L_0} \cap \{x || x| = L_0\}$ と交叉する．線分 $[a_1^-, a_1^+] \cap [s_0, \sigma]$ を弧 $c_1 \cap S_\varphi^{L_0}$ と取り替えれば $a_0^{(1)} \in \partial S_\varphi^{L_0}$ から出るパス $\Gamma_1 = ([s_0, \sigma] \cap \{x || x - a_1| > \epsilon_{a_1}\}) \cup (c_1 \cap S_\varphi^{L_0}) (\ni \sigma)$ を得る．このとき Γ_1 の $a_0^{(1)}$ から a_1^+ の部分で (iii) の不等式が成立し、特に $|y(a_1^+) - \mu| \geq 2\Delta$.

もし Γ_1 に沿って (iii) が成り立つならば、$\Gamma(\sigma) = \Gamma_1$ でよし、そうでなければ、a_1^+ から出て $[a_1^+, \sigma] \subset \Gamma_1$ に沿って $|y(a_2) - \mu| = \Delta$; かつ $[a_1^+, a_2] \backslash \{a_2\}$ 上 $|y(x) - \mu| > \Delta$ となる点 a_2 まで延ばす．すると、直径 $[a_2^-, a_2^+]$ の半円 c_2: $|x - a_2| = \epsilon_{a_2}, \subset S_\varphi^{L_0}$ が取れる．ただし、$|a_2^- - \sigma| > |a_2^+ - \sigma|$. $a_0^{(2)} \in S_\varphi^{L_0}$ より出でて σ に至るパス $\Gamma_2 = (\Gamma_1 \cap \{x || x - a_2| > \epsilon_{a_2}\}) \cup (c_2 \cap \{x || x - a_1| > \epsilon_{a_1}\} \cap S_\varphi^{L_0})$ を考えると、少なくとも Γ_2 の $a_0^{(2)}$ から a_2^+ への部分で (iii) の不等式が満たされる．この手続きを繰り返す．

なお、この手続は有限回で終わる．なぜなら、もし上記手続きが無限に続いたとすると、$\sum_{n=1}^\infty \epsilon_{a_n} \leq |\sigma - s_0|$ 及び $|y(a_n)| \leq \Delta + \mu$ を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset I$ があって、(2) より、$a_{n_j} \to a_* \in I$, $y(a_{n_j}) \to y_* \neq \infty$, $y'(a_{n_j}) \to \infty$ as $j \to \infty$ を満たす部分列 $\{a_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ が取れるが、$y(a_*) = y_* \neq \infty, y'(a_*) = \infty$ となって矛盾だからである．よって有限回の手続きで (i),(iii) を満たすパス $\Gamma(\sigma)$ が得られる．

c_j $(j = 1, 2, ..., l)$ を、$\Gamma(\sigma)$ の構成の上で使った中心 a_j の半円とすると、ϵ_{a_j} は $\sum_{j=1}^l \epsilon_{a_j} \leq |\sigma - s_0|$ を満たすので、$\Gamma(\sigma)$ の長さは次で抑えられる：$|\sigma - s_0| + \pi \sum_{j=1}^l \epsilon_{a_j} \leq (\pi + 1)|\sigma - s_0| \leq (\pi + 1)|\sigma|$. すなわち (ii) を満たす．これにて Lemma 2.2 が得られた．//qed.

Proof of Lemma 2.4

Proof. まず exponential 部分の評価を与える．Lemma 2.2 で構成した $\Gamma(\sigma)$ 上で

$$E(x) = \exp\left[(1 - \mu) \int_{\Gamma(\sigma)} \frac{\mathrm{d}x}{x} \frac{(y(x) - 1)(y(x) + \mu)}{(y(x) - \mu)^2}\right]$$

かつ

$$|1-\mu|\left|\frac{(y(x)-1)(y(x)+\mu)}{(y(x)-\mu)^2}\right| \leq B_0.$$

であるから、

$$|E(x)^{\pm}| \leq \exp\left[B_0 \int_{\Gamma(\sigma)} \frac{|\mathrm{d}x|}{|x|}\right] \leq |x|^{C_1}.$$

故に、補助関数

$$\begin{aligned}\Psi(\mu,x) &= \Psi(\mu,x_0)E(x)\\ &\quad -2(1-\mu)^2\left\{\frac{y(x)}{(y(x)-\mu)^2}+\frac{y(x_0)E(x)}{(y(x_0)-\mu)^2}\right\}\\ &\quad +E(x)\int_{\Gamma}\mathrm{d}xE(x)^{-1}(\Xi_1-\Xi_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Xi_1 &= 4(1-\mu)\frac{(y(x)-1)(\alpha\mu y(x)-\beta)}{x(y(x)-\mu)^2}\\ &\quad -2\gamma\frac{((1-2\mu)y(x)+\mu)}{(y(x)-\mu)^2}+4\delta\mu x\frac{y(x)}{(y(x)-\mu)^2},\\ \Xi_2 &= 2(1-\mu)^3\frac{y(x)(y(x)-1)(y(x)+\mu)}{x(y(x)-\mu)^4},\end{aligned}$$

に対し、その評価として次を得る：$\Psi(\mu,x) \leq K_0|x|^{C_0}$. //qed.

Proof of Lemma 2.5

補助関数の定義式 (3) を y' の 2 次方程式としてみると、$Ay'^2 - By' + C = 0$. ただし、

$$A=\frac{x^2}{y(x)\{y(x)-1\}^2},\quad B=\frac{2(1-\mu)x}{\{y(x)-1\}\{y(x)-\mu\}},$$
$$C=-2\alpha y(x)+\frac{2\beta}{y(x)}+\frac{2\gamma x}{y(x)-1}+\frac{2\delta x^2 y(x)}{\{y(x)-1\}^2}-\Psi(\mu,x).$$

上記で更に $y(x)-1=Y(x)$ とおくと、$AY'^2 - BY' + C = 0$. ただし、

$$A=\frac{x^2}{Y(x)^2\{1+Y(x)\}},\quad B=\frac{2(1-\mu)x}{Y(x)\{1-\mu+Y(x)\}},$$
$$C=-2\alpha\{1+Y(x)\}+\frac{2\beta}{1+Y(x)}+\frac{2\gamma x}{Y(x)}+\frac{2\delta x^2\{1+Y(x)\}}{Y(x)^2}-\Psi(\mu,x).$$

この 2 次方程式を解くと、

$$Y'=\frac{B}{2A}\pm\frac{(B^2-4AC)^{1/2}}{2A}. \tag{10}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{B}{2A} &= \frac{(1-\mu)Y(1+Y)}{x(1-\mu+Y)}. \\
\frac{B^2-4AC}{(2A)^2} &= -2\delta(1+Y)^2 - \frac{2\gamma Y(1+Y)}{x} \\
&\quad + \frac{1}{x^2}\left[2\alpha Y^2(1+Y)^2 - 2\beta Y^2 + \frac{(1-\mu)^2 Y^2(1+Y)^2}{(1-\mu+Y)^2} + Y^2(1+Y)\Psi\right].
\end{aligned}
$$

上式を見ると、(10) の右辺は概ね $|-2\delta|^{1/2}$ 程度、すなわち、十分大きな x と十分小さな Y に対し $Y' \simeq |-2\delta|^{1/2}$, であって、若干の計算の後、

$$
\frac{\mathrm{d}Y(x)}{\mathrm{d}x} = \pm(-2\delta)^{1/2}(1+h^{\pm}(x))
$$

が得られる．ただし、

$$
\begin{aligned}
h^{\pm}(x) &\underset{\text{def.}}{=} (1+Y(x))\left\{(1+F(x))^{1/2} \pm \frac{(-2\delta)^{-1/2}}{1+Y(x)}\frac{B}{2A}\right\} - 1, \\
F(x) &\underset{\text{def.}}{=} \frac{j_1(x)}{x} + \frac{j_2(x)}{x^2}, \\
j_1(x) &\underset{\text{def.}}{=} \frac{\gamma Y(x)}{\delta(1+Y(x))}, \\
j_2(x) &\underset{\text{def.}}{=} -\frac{\alpha Y(x)^2}{\delta} + \frac{\beta Y(x)^2}{\delta(1+Y(x))^2} \\
&\quad -\frac{(1-\mu)^2 Y(x)^2}{2\delta(1-\mu+Y(x))^2} - \frac{Y(x)^2\Psi(\mu,x)}{2\delta(1+Y(x))},
\end{aligned}
$$

であって、$F(x)\to 0$ のとき $(1+F(x))^{1/2}$ tends to 1 なるよう分枝をとる．これより、$t=x-\sigma$ を局所変数にとれば、Lemma 2.5 の結果を得る：

$$
\frac{\mathrm{d}Y_\sigma(t)}{\mathrm{d}t} = \pm(-2\delta)^{1/2}(1+h_\sigma^{\pm}(t)),
$$

$$
\begin{gathered}
Y_\sigma(t) \underset{\text{def.}}{=} Y(\sigma+t), \quad h_\sigma^{\pm}(t) \underset{\text{def.}}{=} h^{\pm}(\sigma+t), \quad F_\sigma(t) \underset{\text{def.}}{=} F(\sigma+t), \\
j_{1\sigma}(t) \underset{\text{def.}}{=} j_1(\sigma+t), \quad j_{2\sigma}(t) \underset{\text{def.}}{=} j_2(\sigma+t), \quad \Psi_\sigma(\mu,t) \underset{\text{def.}}{=} \Psi(\mu,\sigma+t).
\end{gathered}
$$

Proof of Lemma 2.6

Proof. $|\sigma| > 2L_0$, $P = C_0/2$ であって、条件の下で $|t| < \frac{1}{3}$ に対し、$|Y_\sigma(t)| \le b|x|^{-P} \le bL_0^{-P}$, $|1-\mu+Y_\sigma(t)| \ge |1-\mu| - |Y_\sigma(t)| \ge |1-\mu| - bL_0^{-P}$, $|1+Y_\sigma(t)| \ge 1 - bL_0^{-P}$, $|\Psi_\sigma(\mu,t)| \le K_0|x|^{C_0}$ であるから、$F_\sigma(t)$ の各項につ

いて次のように評価できる：

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\gamma Y_\sigma(t)}{\delta(1+Y_\sigma(t))}\right| &\le \left|\frac{\gamma}{\delta}\right| \frac{bL_0^{-P}}{1-bL_0^{-P}}, \\
\left|-\frac{\alpha Y_\sigma(t)^2}{\delta}\right| &\le \left|\frac{\alpha}{\delta}\right| b^2 L_0^{-2P}, \\
\left|\frac{\beta Y_\sigma(t)^2}{\delta(1+Y_\sigma(t))^2}\right| &\le \left|\frac{\beta}{\delta}\right| \frac{b^2 L_0^{-2P}}{(1-bL_0^{-P})^2}, \\
\left|\frac{(1-\mu)^2 Y_\sigma(t)^2}{2\delta(1-\mu+Y_\sigma(t))^2}\right| &\le \left|\frac{(1-\mu)^2}{2\delta}\right| \frac{b^2 L_0^{-2P}}{(|1-\mu|-bL_0^{-P})^2}, \\
\left|\frac{Y_\sigma(t)^2 \Psi_\sigma(\mu,t)}{2\delta(1+Y_\sigma(t))}\right| &\le \frac{1}{|2\delta|} \frac{b^2 K_0}{1-bL_0^{-P}}.
\end{aligned}$$

$F_\sigma(t)$ が十分小さくなるよう、正数 b を十分小さく取ると、b の取り方は σ によらないから（上の各評価式で σ は右辺に現れない）、

$$h^{\pm}(x) = (1+Y(x))\left\{(1+F(x))^{1/2} \pm \frac{(-2\delta)^{-1/2}}{1+Y(x)} \frac{B}{2A}\right\} - 1$$

より、b を十分小さく取って、$|h_\sigma^{\pm}(t)| < \frac{1}{2}$ となるようにできる．//qed.

参考文献

[1] Gromak,V.I., Laine,I. and Shimomura,S., *Nevanlinna theory and Painlevé differential equations,* de Gryter, Berlin, New York, 2002.

[2] Sasaki,Y., *Thesis,* Univ.Tokyo, 2003.

[3] Shimomura,S., *Growth of modified Painlevé transcendents of the fifth and the third kind,* to appear.

[4] Shimomura,S., *Lower estimates for the Growth of Painlevé transcendents,* Funkcial. Ekvac., to appear.

[5] Shimomura,S., *Nevanlinna* **理論の微分方程式への応用**, Rokko Lectures in Mathematics 14, 神戸大学理学部数学教室, 2003.